https://doi.org/10.36719/2663-4619/109/156-160

Novruz Nəsirov
Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti
kafedra.rtt@adpu.edu.az
Günel Şahməmmədova
Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti
kafedra.rtt@adpu.edu.az

Bəzi tip irrasional tənlik və bərabərsizliklərin həlli

Xülasə

Tənlik və bərabərsizliklər anlayışı məktəb riyaziyyat kursunun ən əhəmiyyətli sahələrindən biridir. Bu daha çox onunla izah olunur ki, tənlik və bərabərsizlik anlayışlarından riyaziyyatın müxtəlif sahələrində, eləcə də mühüm praktik məsələlərin həllində geniş istifadə olunur. Bu tənlik və bərabərsizliklər içərisində isə irrasional tənlik və bərabərsizliklərin özünəməxsus rolu və əhəmiyyəti vardır.

Məqalədə bəzi tip irrasional tənlik və bərabərsizliklərin həlli üsullarına baxılmışdır. Müxtəlif həll üsulları ilə yanaşı, irrasional tənlik və bərabərsizliklərin həllində süni üsullar da tətbiq edilir. İrrasional tənlik və bərabərsizliklərin həllində hansı üsulun tətbiq edilməsindən asılı olmayaraq, elə etmək lazımdır ki, hər sonrakı mərhələdə alınan tənlik, yaxud bərabərsizlik əvvəlki ilə eynigüclü olsun. Yaxud da heç bir məhdudiyyət qoymadan verilmiş tənliyi həll edərkən alınan köklərin yoxlanması əsas məsələlərdən biridir.

Məqalədə, xüsusilə bir çox hallarda irrasional bərabərsizliyin hər iki tərəfinin bir neçə dəfə qüvvətə yüksəltməklə onu rasional bərabərsizliyə gətirilməsi, bu zaman alınan yeni bərabərsizliyin əvvəlki ilə eynigüclü olmasının gözlənilməsi mərhələsinin metodik şərhi misal nümunələri ilə verilmişdir.

Açar sözlər: *tənlik, bərabərsizlik, radikal, parametr, qüvvət*

Novruz Nasirov
Azerbaijan State Pedagogical University
kafedra.rtt@adpu.edu.az
Gunel Shahmammadova
Azerbaijan State Pedagogical University
kaedhra.rtt@adpu.edu.az

Solution of Some Types of Irrational Equations and Inequalities

Abstract

The concept of equations and inequalities is one of the most important areas of the school mathematics course. This is mostly explained by the fact that the concepts of equation and inequality are widely used in various fields of mathematics, as well as in solving important practical problems. Among these equations and inequalities, irrational equations and inequalities have a special role and importance.

Some types of irrational equation and inequality solving methods are considered in the article. Along with various solution methods, it is applied in artificial methods in solving irrational equations and inequalities. Regardless of what method is applied in solving irrational equations and inequalities, it is necessary to make sure that the equation or inequality obtained at each subsequent stage is the same as the previous one. Or checking the roots obtained when solving the given equation without any restrictions is one of the main issues.

In the article, especially in many cases, the methodical interpretation of the stage of expecting the new inequality to be the same as the previous one, bringing it to a rational inequality by increasing the strength of both sides of the irrational inequality several times, is given with examples.

Keywords: *equation, inequality, radical, parametr, power*

Giriş

Tənlik və bərabərsizlik anlayışı məktəb riyaziyyat kursunun ən geniş və əhəmiyyətli anlayışlardan biridir. Məlumdur ki, məktəb riyaziyyat dərsliklərinə müxtəlif tip cəbri, eləcə də transendent tənliklər və bərabərsizliklər daxil edilmişdir. Bu tənliklər və onların həllində istifadə olunan funksional xətt haqqında bəzi ümümi məsələləri qeyd edək.

Tədqiqat

Tərif. Bərabərliyin sağ və sol tərəfi cəbri funksiyalar olarsa belə tənliklərə **cəbri tənliklər** deyilir.

Tərif. Transendent tənlik sağ və sol tərəfi transendent funksiyalardan ibarət olan tənliklərə deyilir.

İrrasional tənliklər cəbri tənliklərdir.

Məsələn $\sqrt{x^3+2x^2-x+1)}= \sqrt{x^3+x^2+3x+4}$ cəbri, irrasional tənlik, $lg^2x=2$ isə transendent tənlikdir.

Əgər tənlik hər hansı bir mətnli məsələnin şərtinə uyğun alınıbsa, onun həllinin şərtin məzmununa uyğun olub-olmamasını araşdırmaq lazımdır. Məsələn, şərtində insanların sayı ilə bağlı verilən mətnli məsələlər müəyyən cəbri tənliyə gətirilirsə, tənliyin həlli zamanı insanların sayı mənfi tam, yaxud kəsr ədəd ola bilməz. Odur ki alınan həll araşdırılmalıdır (Ümumtəhsil məktəblər üçün riyaziyyat kurikulumu, 2021).

Tənliyin həlli zamanı çevrilmələr vasitəsilə onu bir şəkildən başqa şəkilə və nəticədə isə onu elə məlum eyniliyə gətirmək lazım gəlir ki, tənliyin həlli aydın görünsün. Bu çevrilmələrdə belə suallar ortaya çıxa bilər. Tapılan həll təyin oblastına daxildirmi? Kök itirilmir ki? Kənar həllər alınırmı?

Tərif. $F_1(x)=F_2(x)$ və $\Phi_1(x)=\Phi_2(x)$ tənliklərində 1-cinin hər bir həlli 2-ci tənliyin və əksinə olarsa, onda bu tənliklərə eynigüclü tənliklər deyilir. Xüsusi halda əgər eyni zamanda hər iki tənliyin həlli olmazsa, onlarda eynigüclü hesab edilir.

Teorem 1. $F_1(x)=F_2(x)$ tənliyi üçün W(x) isə bu tənliyin təyin oblastından götürülən istənilən qiymətlərində mənası varsa, onda

$$F_1(x)+W(x)=F_2(x)+W(x)$$

tənliyi verilmiş tənliklə eynigüclüdür.

Nəticə. Tənliyin ixtiyari həddinin, işarəsini əksinə dəyişməklə, tənliyin bir tərəfindən digər tərəfinə keçmək olar.

Tənliyin hər tərəfinə, tənliyin təyin oblastına daxil olan hər hansı bir ifadəni əlavə etsək, eynigüclü tənlik alınar.

Teorem 2. $F_1(x)=F_2(x)$ və $F_1(x)\,w(x)=F_2(x)\,w(x)$ tənlikləri eynigüclüdür. Burada w(x) tənliyin təyin oblastına daxil olan ixtiyari bir ifadədir və onun qiyməti sıfırdan fərqlidir.

Nəticə: Tənliyin hər tərəfini sıfırdan fərqli hər hansı ədədə vursa, onunla eynigüclü olan tənlik alınar (Ağayev, 1967).

Tənliyin həlli prosesində müxtəlif çevrilmələrə, xüsusilə radikalların çevrilməsi kəsrlərin ixtisarı və s. rast gəlinir. Burada kök itə bilər, yaxud tənliyin hər tərəfini qüvvətə yüksəltdikdə kənar köklər alına bilər. Bütün bu hallar həll prosesində araşdırılmalıdır.

Cəbri tənliklər içərisində irrasional tənliklər mühüm yer tutur. İrrasional tənliklər 9 və 11-ci siniflərin standartlarında öz əksini tapmışdır. Ənənəvi cəbri metodlarla yanaşı, irrasional tənliklərin müxtəlif həll üsulları da mövcuddur. Bu metodlar içərisindən bir neçəsini qeyd edək.

$\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=0$ şəklində tənliklərin həlli $f(x)=0$ və $g(x)=0$ tənliklərinin üst-üstə düşən həlli olur. Məsələn,

Misal 1. Tənliyi həll edin.

$$\sqrt{x-3}+\sqrt{x^2-4x+3}=0$$

Yuxarıdakı qaydaya əsasən $x - 3 = 0$ Burada $x = 3$ və $x^2 - 4x + 3 = 0$ tənliyini həll etsək, $x_1 = 1$ $x_2 = 3$ həllərini alarıq. Buradan göründüyü kimi, $x = 3$ həlli hər iki tənliyin qiymətini 0-a çevirən kökdür. Ona görə tənliyin həlli $x = 3$ olur (Quliyev, 2008).

Misal 2. Tənliyi həll edin:

$\sqrt{x-1} + \sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2+2x-3} = 0$

Burada $\sqrt{x-1} = 0$ $\sqrt{x^2-1} = 0$ $\sqrt{x^2+2x-3} = 0$ tənliklərini həll etsək, x_1=1 $x_2 = -1$ $x_3 = 1$ $x_4 = 1$ $x_4 = -3$ $x_5 = 1$ alarıq. Deməli, x =1 həlli hər 3 tənliyin qiymətini 0-a çevirən kökdür. Ona görə tənliyin həlli x =1-dir.

Funksional xətti tənliklər həllində mühüm yerlərdən birini tutur. Bəzi irrasional tənliklər vardır ki, tənliyi həll etməzdən əvvəl tənliyin mümkün qiymətlər çoxluğu tapılır. Əgər tənliyin təyin oblastı müəyyən ədədlər və aralıqlar olarsa, onda tənliyi analitik üsulla həll etmək və tənliyin həllər çoxluğunu tapmaq lazımdır. Əgər tənliyin təyin oblastını taparkən təyin oblastının boş çoxluq olduğunu müəyyən etdikdə verilən tənliyin həlli üçün məlum üsulları tətbiq etməyə ehtiyac yoxdur (Sharydin, 1988).

Misal 3. Tənliyi həll edin.

$\sqrt{x-4} + \sqrt{2-x} = 7$

Tənliyin təyin oblastını tapaq.

$$\begin{cases} x-4 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases}$$

Burada,

$$\begin{cases} x \geq 4 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

Göründüyü kimi, təyin oblastının tapılmasında alınan bərabərsizlik sisteminin həlli yoxdur. Odur ki tənliyin analitik üsulla həllinə ehtiyac qalmır.

Son onilliklərdə respublikamızın ümümtəhsil məktəblərində istifadə olunan milli dərsliklərin üstün cəhətlərindən ən əsası ondan ibarətdir ki, riyaziyyat dərsliklərində hər bir riyazi ifadələr, onların çevrilməsində, habelə öyrədilən tənlik və bərabərsizliklər, onların sisteminə parametr daxil edilmiş çalışmalar sistemi çoxluq təşkil edir. Xüsusilə DİM-in ali məktəblərə qəbul sistemində belə parametr daxil olan məsələlərə xüsusi üstünlük verilmişdir (Qəhrəmanova, 2021).

Doğrudur, parametr daxil olan məsələlərin həlli nisbətən çətin olsa da, lakin bu tip məsələlər şagirdlərin idrak marağını, onların təfəkkürünü, tədqiqatçılıq bacarığını inkişaf etdirir ki, bu şagirdlərin elmi-tədqiqat sahəsinə marağını artırır. Bu tip məsələlərin dərnək və fakültətiv məşğələlərdə həll etdirilməsi məsləhətdir. Odur ki biz parametr daxil olan irrasional tənlik və bərabərsizliklər və onların həllini misal nümunələri ilə verməyi məqbul hesab edirik (Qəhrəmanova, 2021).

Misal 3. a parametrinin qiymətinə əsasən $\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} = x$ tənliyini həll edin.

Həlli: Tənliyin verilmə ifadəsinə görə aydındır ki, $x \geq 0$. Əgər a = 0 olduqda isə bu halda $x = 0$ olar və eyni zamanda əksi də doğrudur. Belə ki, $x = 0$ olarsa $a = 0$ olar.

Tutaq ki, $x \geq 0$. Tənliyin hər tərəfini ikinci dərəcədən qüvvətə yüksəldək.

$2\sqrt{a^2-x^2} = x^2 - 2a$ tənliyini alırıq ki, onun da $a < 0 \leq a, x^2 \geq 2a$ şəklində həlli olar.

Təkrar olaraq hər tərəfi ikinci dərəcədən qüvvətə yüksəltsək və $x > 0$ şərtini nəzərə alsaq $x = 2\sqrt{a-1}$, $a > 1$ qiymətini alarıq. Məlumdur ki, $0 < x \leq a$ şərti, bütün $a > 1$ qiymətləri üçün $x^2 \geq 2a$ olan halda isə ancaq $a \geq 2$ şərtində mümkündür. Onda cavab aşağıdakı kimi olar (Adıgözəlov, 2001, s. 284).

Cavab : a$\in (-\infty; 0) \cup (0; 2)$

Misal 2. a parametrinin qiymətlərinə nəzərən

$$\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} > a$$

bərabərsizliyinin həllini araşdırın.

Həlli: Aydındır ki, $a \leq 0$ olan halda verilən bərabərsizliyin ümümiyyətlə həlli yoxdur. Əgər $a > 0$ olarsa, onda bərabərsizliyin təyin oblastı $|x| \leq a$ bərabərsizliyi şəklində olar. Bütün bu şərti ödəyən x –lərə görə, tərəfləri mənfi olmayan verilən bərabərsizliyin hər tərəfini ikinci dərəcədən qüvvətə yüksəldək. Onda $2\sqrt{a^2 - x^2} > a^2 - 2a$ şəklində bərabərsizlik alırıq (Quliyev, 2009).

Bu bərabərsizliyin həlli üçün üç vəziyyətə baxaq.

a) Əgər $a^2 - 2a < 0$ olarsa, belə ki, $0 < a < 2$ olarsa, bu halda alınan axırıncı bərabərsizlikdə istənilən x-in qiymətləri $|x| \leq a$ bərabərsizliyi ödənilir.

b) $a^2 - 2a = 0$ olduğu halda, yəni a = 2 qiymətində verilən bərabərsizliyin $2\sqrt{4 - x^2} > 0$ şəklində olan bərabərsizliyə çevrilər. Bu bərabərsizliyin həlli isə $|x| < 2$ olar.

c) Əgər $a^2 - 2a > 0$ olarsa, yəni belə ki, $a > 2$ olduqda, verilən bərabərsizliyin mənfi olmayan tərəflərini ikinci dərəcədən qüvvətə yüksəldək. Onda

$$4(a^2 - x^2) > a^4 - 4a^3 + 4a^2$$

bərabərsizliyini alarıq ki, bu bərabərsizlik verilən bərabərsizliklə ekvivalentdir. Alınan bərabərsizliyi sadələşdirək və x dəyişəninə nəzərən həll etsək,

$$x^2 < \frac{a^3(4-a)}{4}$$

olduğunu alarıq.

Göründüyü kimi, a$\geq$ 4 qiymətlərində bərabərsizliyinin həlli boş çoxluqdur.

Əgər 2$< a < 4$ qiymətlərində onda verilən bərabərsizliyin həlli $|x| = \frac{1}{2}$ ($a\sqrt{a(4-a)}$ olar.

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, həll nəticəsində alınan bütün qiymətlər $|x| \leq a$ bərabərsizliyini ödəyir.

Beləliklə, $a \leq 0\,, a \geq 4$ şərtini ödəyən qiymətlərində bərabərsizliyin həlli yoxdur. 0$< a < 2$ aralığındakı qiymətlər üçün bərabərsizliyin $-a \leq x \leq a$ həlli $a = 2$ qiymətində bərabərsizliyin həlli $-2 < x < 2$ aralığındadır. $2 < a < 4$ qiymətlərində isə bərabərsizliyin

$$-\frac{a\sqrt{a(4-a)}}{2} < x < \frac{a\sqrt{a(4-a)}}{2} \text{ həlli olar.}$$

Misal 3. a parametrinə əsasən $\sqrt{2ax - x^2} \geq a - x$ bərabərsizliyini həll edin.

Həlli: Fərz edək ki, a parametrinin qiyməti a=0 dır. Onda bərabərsizliyi yalnız x=0 qiyməti ödəyir. Əgər a$\neq$ 0 isə onda bərabərsizliyin hər tərəfinə bir funksiya kimi baxaq. Onlardan birini y_1 yəni $y_1 = \sqrt{2ax - x^2} = \sqrt{a^2 - (x-a)^2}$, digərini isə y_2 ilə işarə edək. Belə ki, $y_2 = a - x$

Diqqətlə analiz etsək görərik ki, y_1 funksiyasının mərkəzi $(a;0)$ nöqtəsində yerləşən və radiusu a olan yarımçevrələrdən ibarətdir. y_2 funksiyası isə $(a;0)$ nöqtəsindən keçən $y_2 = a - x$ düz xətlər çoxluğunu alırıq (Məmmədov, 2012).

Onda verilən bərabərsizliyin həlli eyni bir koordinant müstəvisində, y_1 və y_2 funksiyalarının qurulması və qrafiklərinin kəsişməsini tapmaq lazımdır. Bunun üçün $\sqrt{2ax - x^2} = a - x$ tənliyinin həlli zəruridir. Bərabərsizliyin həlli isə absisləri düz xətdən yuxarıda hissəsində qalan yarımçevrələrin absislərindən ibarətdir.

Beləliklə, $a < 0$ olduqda bərabərsizliyin həlli $a(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) \leq x \leq 0$

$a = 0$ olarsa, onda $x = 0$ olar.

$a > 0$ olduqda isə $a(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) \leq x \leq 2a$ olar.

Misal 4. $x + 4a > 5\sqrt{ax}$ bərabərsizliyini a parametrinin qiymətindən asılı olaraq həll edin.

Həlli: $a < 0$ şərtini ödəyən qiymətlərində bərabərsizliyin sağ tərəfinin mənası olması üçün $x \leq 0$ qiymətlərin olmalıdır. Bu halda da bərabərsizliyin sol tərəfinin qiymətinin mənfi qiymət olması mümkün deyil (Nəsirov, 2018).

$a = 0$ qiymətində baxılan bərabərsizlik bütün $x > 0$ qiymətləri üçün ödənilir. a parametrinin $a > 0$ qiymətlərində isə $x \geq 0$ olmalıdır. Bu onu göstərir ki, bu şərtlər daxilində bərabərsizliyin hər tərəfi mənfi deyildir. Odur ki bərabərsizliyin hər tərəfini ikinci dərəcədən qüvvətə yüksəldək. Onda, $(x + 4a)^2 > 25ax$, sadələşdirsək $x^2 - 17a + 16a^2 > 0$ bərabərsizlikləri ilə ekvivalent bərabərsizlik alınar. Sonuncu bərabərsizliyin sol tərəfini kökləri əsasında $(x-a)(x-16a) > 0$ şəklində yaza bilərik. Burada $a > 0$ şərtində $x \geq 0$ alarıq. Beləliklə, bərabərsizliyin həlli $x \in |0; a) \cup$

$(16a;\ +\infty)$. Yəni $a < 0$ olanda həll boş çoxluq, $a = 0$ olan halda $x > 0, a > 0$ olduqda isə $[0; a) \cup (16a;\ +\infty)$ olar.

Ümumtəhsil orta məktəblərinin yuxarı siniflərində, xüsusilə XI sinifdə irrasional tənliklər və bərabərsizliklərin tədrisi metodikası sahəsində apardığımız müşahidələr zamanı aşağıdakı nəticələrə gəlmək olar (Kolyagin, 1977, s. 480).

1. İrrasional tənlik və bərabərsizliklər həlli prosesində şagirdlər riyaziyyatdan keçilən materialları bir daha təkrarladır.
2. Müəllim sadə irrasional tənlik və bərabərsizliklər həllindən başlayaraq daha mürəkkəb tənliklər, bərabərsizliklər həlli ilə şagirdlərin bu sahədəki bilik və bacarıqlarını formalaşdırır.
3. Riyaziyyatdan fakültətiv və dərnək məşğələlərində, eləcə də riyaziyyat təmayüllü siniflərdə, parametr daxil olan irrasional tənlik və bərabərsizlikləri həll etdirməklə onların yaradıcılıq fəallığını, xüsusilə şagirdlərin tədqiqatçılıq qabiliyyətlərini inkişaf etdirir.
4. Hər bir riyaziyyat müəllimi irrasional tənlik və bərabərsizlikləri həll etdirərkən həll yollarını hazır şəkildə şagirdə verməməli, elə motivasiya və situasiya yaratmalıdır ki, həll üsullarını şagird özü məlum biliklər əsasında müəyyənləşdirməli və həll etdirməlidir. Tapılan həllin tənliyin, yaxud bərabərsizliyin təyin oblastına daxil olmasını, habelə kənar köklərin təyini və s. anlayışların şagird bacarıqlarında avtomatlaşdırılmasına şərait yaradılmalıdır (Məmmədov, 1991, s. 320).

Nəticə

Məsələnin aktuallığı: Ümumtəhsil məktəblərində məsələ həlli sahəsində şagirdlərin çətinliklərinin qismən də olsa aradan qaldırılması üçün mövzunun tədqiq edilməsi aktuallıq kəsb edir.

Məqalənin elmi yeniliyi: Ümumiyyətlə, riyaziyyatda məsələlərin həlli üçün ümumi həll alqortmi məlum deyildir. Bu sahədə aparılmış tədqiqat işləri kimi bizim məqalədə də məsələ həllinin bəzi ümumi həll metodikası araşdırılmış və müasirlik baxımından yeni həll üsulları göstərilmişdir.

Məqalənin praktik əhəmiyyəti və tətbiqi: Məqalə ümumtəhsil məktəblərinin müəllimləri, bakalavriat və magistr tələbələrinin istifadə etməsi və onların bu sahədəki bacarıqlarının formalaşdırılması üçün əhəmiyyətlidir.

Ədəbiyyat

1. Ağayev, B. A. (1967*). Riyaziyyat məsələləri.*
2. Adıgözəlov, A. S. (2001). *Riyaziyyatın tədrisinin xüsusi metodikası*. ADPU.
3. Kolyagin, Yu. M. (1977). *Metodika prepodavaniya matematiki v sredney shkole. Tsastnyye metodiki.*
4. Quliyev, Ə. A. (2008). *Planimetriyanın məsələ vasitəsilə təkrarı.*
5. Qəhrəmanova, N. (2021). *Riyaziyyat 9-cu siniflər üçün dərslik*. Şərq-Qərb.
6. Qəhrəmanova, N. (2021). *Riyaziyyat 11-ci siniflər üçün dərslik.* Şərq-Qərb.
7. Quliyev, Ə. A. (2009). *Riyaziyyatın tədrisində ümumiləşdirmə*. Elm.
8. Məmmədov, Ə. M. (2012). *Elementar Riyaziyyat*. ADPU.
9. Məmmədov, R. H. (1991). *Tənliklər və bərabərsizliklər.*
10. Nəsirov, N. B. (2018). *Məktəb Riyaziyyat kursunda parametr daxil olan tənliklər*. ADPU.
11. Sharydin, I. I. (1988). *Zadachi po geometrii*. Nauka.
12. *Ümumtəhsil məktəblər üçün riyaziyyat kurikulumu*. (2021).

Daxil oldu: 07.08.2024
Baxışa göndərildi: 09.10.2024
Təsdiq edildi: 22.11.2024
Çap olundu: 20.12.2024